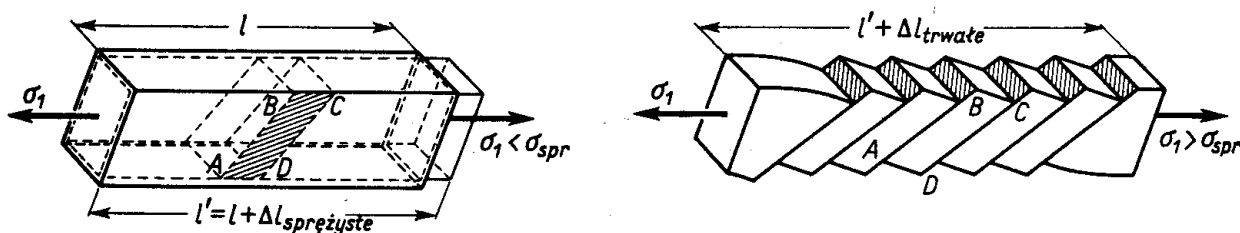


# 8

## HIPOTEZY WYTRZYMAŁOŚCIOWE. WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA PRĘTA

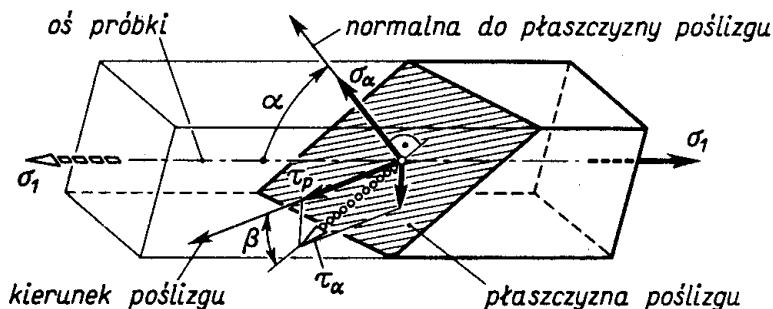
### 8.1. Zjawiska towarzyszące trwałym odkształceniom

Opisując wykres rozciągania stwierdzono, że płynięciu materiału towarzyszy zjawisko poślizgów. Występuje ono szczególnie wyraźnie przy rozciąganiu próbek wyciętych z dużych monokryształów metalu (rys. 8.1). Z początku, gdy  $\sigma_1 < \sigma_{spr}$ , próbka wydłuża się równomiernie, a jej powierzchnia jest gładka. Gdy  $\sigma_1 > \sigma_{spr}$ , wydłużenie staje się *nierówno-*



Rys. 8.1. Obraz sprężystych i plastycznych odkształceń próbki monokrystalicznej

*mierne*. Poszczególne plasterki próbki, jak *ABCD*, ślizgają się po sobie jako widoczne gołym okiem sztywne bloki, a próbka, jako całość, doznaje trwałego wydłużenia. Badania rentgenograficzne wykazują, że położenie płaszczyzn przesunięć, tzw. *płaszczyzn poślizgu*,



Rys. 8.2. Obraz naprężeń w płaszczyźnie i kierunku poślizgu

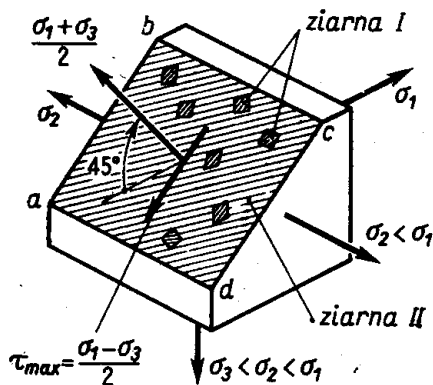
względem siatki atomów monokryształu jest stałe. Również stały w odniesieniu do siatki jest kierunek przesunięcia w płaszczyźnie poślizgu, tzw. *kierunek poślizgu*. W stosunku natomiast do osi próbki (rys. 8.2) położenie tej uprzywilejowanej płaszczyzny (kąt  $\alpha$ )

i kierunku poślizgu (kąt  $\beta$ ) może być różne, albowiem z danego monokryształu można wyciąć próbki o różnej orientacji osi względem jego siatki. Okazuje się z doświadczeń, że w tych różnie wyciętych próbkach poślizg bloków występuje, gdy składowe naprężenie styczne  $\tau_p$ , działające w płaszczyźnie i kierunku poślizgu, osiąga pewną krytyczną wartość  $\tau_0$ , stałą dla danego monokrystalicznego materiału. Ponieważ według (2.14) całkowite naprężenie styczne w płaszczyźnie poślizgu jest  $\tau_\alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha$ , zaś  $\tau_p = \tau_\alpha \cos \beta$ , zatem wynik wspomnianych doświadczeń daje się ująć w tzw. *prawo Schmid*

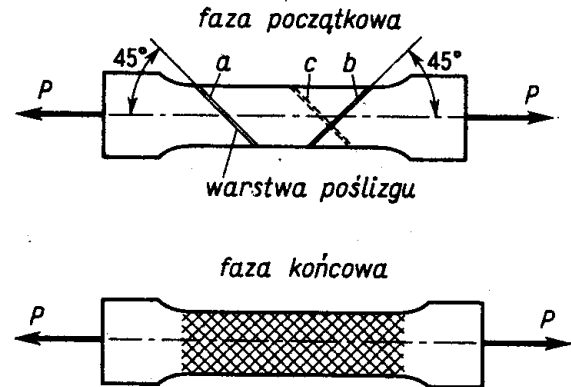
$$\tau_p = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha \cos \beta = \tau_0 = \text{const.} \quad (\text{a})$$

Okazuje się ponadto, że naprężenie normalne  $\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha$  nie wpływa zupełnie na zjawisko poślizgu, przynajmniej w tym zakresie, jaki udało się zbadać. Wynika stąd podstawowy wniosek, że *pojawienie się w monokryształach trwałych odkształceń zależy wyłącznie od wartości naprężenia stycznego w przekroju i kierunku zorientowanych w szczególny sposób względem siatki kryształu.*

Powyższy opis nie tłumaczy wcale mechanizmu poślizgu, który w swej istocie jest procesem molekularnym zależnym przede wszystkim od składu materiału, budowy siatki krystalicznej i jej odchylenia od regularności, tzw. defektów. Defekty te mają decydujący wpływ na wartość  $\tau_0$ . Przy dużej ich gęstości  $\tau_0$  jest zaledwie 1 ÷ 10 MPa, przy ich braku, jak w tzw. *kryształach iglastych*,  $\tau_0 \approx G/30$ , a więc wartość o cztery rzędy większa. Duży też wpływ mają domieszki: zanieczyszczenie rzędu 0,01% zwiększają  $\tau_0$  o kilkadziesiąt procent. Wszystkie te zagadnienia są przedmiotem fizyki ciała stałego.<sup>(1)</sup>



Rys. 8.3. Rola niejednorodności w zapoczątkowaniu poślizgu



Rys. 8.4. Poślizgi w materiale polikrystalicznym

W materiałach polikrystalicznych, jakimi są metale stosowane w technice, przebieg zjawiska poślizgu jest bardziej złożony. Chaotyczne ustawienie ziaren utrudnia bardzo zapoczątkowanie poślizgu, a granice ziaren blokują rozszerzanie się poślizgu z jednego ziarna na sąsiednie. Weźmy mianowicie kostkę o trójwymiarowym stanie naprężenia (rys. 8.3). Płaszczyzna  $abcd$ , w której  $\tau_\alpha = \tau_{\max}$ , przecina tylko niewielką część ziaren (ziarna I) w sposób odpowiadający mechanizmowi poślizgu w pojedynczym kryształach, to

<sup>(1)</sup> Patrz: Ch. Kittel, *Wstęp do fizyki ciała stałego*, Warszawa 1960, PWN, A. H. Cottrell, *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*, Oxford 1958, University Press.

znaczy tak, że płaszczyzna  $abcd$  pokrywa się z uprzywilejowaną płaszczyzną poślizgu, a kierunek  $\tau_{\max}$  pokrywa się z kierunkiem poślizgu. Można przyjąć, że w ziarnach tych przy wzroście  $\tau_{\max}$  najwcześniej wystąpi poślizg. Pozostałe ziarna  $II$  odmiennie usytuowane względem płaszczyzny  $abcd$  są bardziej odporne. Trwały poślizg ziaren  $I$  wystąpi dopiero wtedy, gdy otaczające sprężyste ziarna  $II$  odpowiednio się odkształcą. Ze swej więc natury poślizg w materiale polikrystalicznym jest odkształceniem *niejednorodnym*. Przy dalszym wzroście obciążenia uplastycznione ziarna  $I$  nie zwiększają już swego oporu. Nadwyżka zatem obciążenia powoduje wzrost naprężeń tylko w sprężystej części materiału. To z kolei wywołuje lokalne poślizgi w sprężystych dotąd ziarnach. Na skutek ich odmiennej orientacji płaszczyzny poślizgu w tych następnych kryształach różnią się od płaszczyzny  $abcd$ . W wyniku makroskopowy poślizg w materiale polikrystalicznym obejmuje bloki, jak  $ABCD$  na rys. 8.1, oddzielone od siebie *warstwami poślizgu o skończonej grubości* (rzędu  $10^{-3} \div 10^{-4}$  cm), a nie płaszczyznami poślizgu, jak w monokryształach. Przecięcie warstw poślizgu z powierzchnią ciała daje pod lupą wrażenie linii. Te tak zwane *linie Lüdersa* łatwo można zaobserwować w miękkich stalach o wyraźnej granicy plastyczności. W próbce rozciąganej są one nachylone do osi pod kątem  $45^\circ$ . Wskazuje to, że warstwy poślizgu pokrywają się z płaszczyznami, w których działa  $\tau_{\max}$  (rys. 8.4). Ich liczba w początku niewielka (linie  $a$  i  $b$ ) wzrasta wraz z odkształceniem, przy czym nowe linie (linia  $c$ ) krzyżują się z poprzednimi, tak że w końcu cała powierzchnia pokryta jest siatką linii odpowiadających kolejnym warstwom poślizgów. Jak wykazują pomiary, bloki ciała między warstwami poślizgu zachowują się sprężysto, tak że całe prawie trwałe odkształcenie koncentruje się w samych warstwach poślizgu.

## 8.2. Hipotezy wytrzymałościowe: Hubera i $\tau_{\max}$

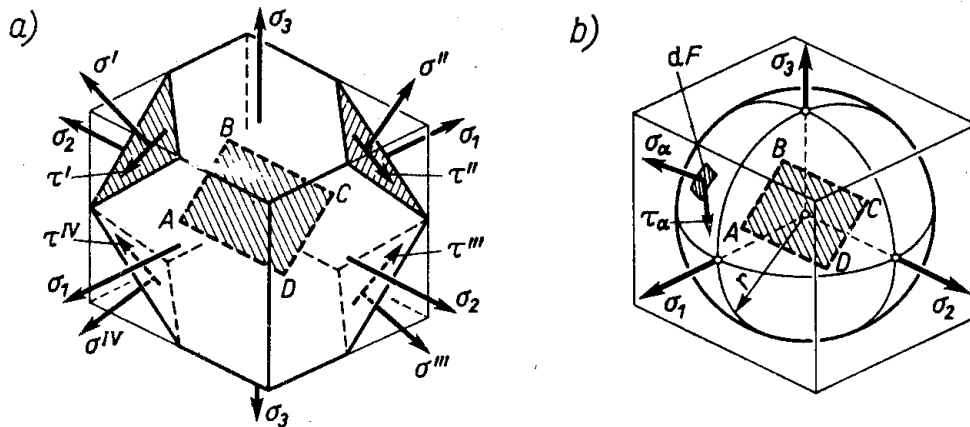
Ścisłe ilościowe ujęcie złożonych zjawisk towarzyszących pojawieniu się w materiałach polikrystalicznych makroskopowych trwałych odkształceń nie jest możliwe. Ujęcie przybliżone jest przedmiotem tzw. *hipotez wytrzymałościowych*. Pomijając hipotezy niezgodne z fizycznym obrazem zjawisk, zajmiemy się tylko dwiema, a mianowicie *hipotezą Hubera*, zwaną również *hipotezą energii odkształcenia postaciowego*, oraz *hipotezą maksymalnych naprężeń stycznych*, w skrócie — *hipotezą  $\tau_{\max}$*  lub *Coulomba-Treski*.

Jak wiemy, pojawienie się trwałych odkształceń w najmniej odpornym ziarnie  $I$  (rys. 8.3) zależy nie tylko od wartości  $\tau_{\max}$ , lecz i od podparcia udzielonego przez otoczenie. Podparcie to jest tym skuteczniejsze, im mniejsze są naprężenia styczne działające w ziarnach otaczających. O poślizgu więc w elemencie  $ABCD$  wyobrażającym przekrój ziarna  $I$  (rys. 8.5a) współdecydują naprężenia  $\tau'$ ,  $\tau''$ , ... we wszystkich przekrojach malutkiej kostki otaczającej ziarno. Ponieważ materiał jest izotropowy (makroskopowo), zatem uzasadnione jest założenie, że te naprężenia  $\tau'$ ,  $\tau''$ , ... współdecydują w *jednakowej mierze* o losie elementu  $ABCD$ . Spełnienie tego postulatu równouprawnienia, jak i uwidocznienie wszystkich możliwych naprężeń  $\tau$ , otrzymamy wycinając w otoczeniu elementu  $ABCD$  kulę (rys. 8.5b). W takim statystycznym ujęciu miarą znaczenia naprężenia  $\tau_x$  działającego na elementarne pole  $dF$  tej powierzchni kulistej jest iloczyn  $\tau_x^2 dF$ . Wprowadzenie  $\tau_x^2$  uwzględnia w naj-

prostszy sposób<sup>(1)</sup> fakt, że pojawienie się poślizgu zależy tylko od absolutnej wartości  $\tau_x$ , a czynnik  $dF$ , stanowi miarę udziału tego  $\tau_x$  w stosunku do całego pola  $F = 4\pi r^2$  powierzchni kuli. Miarą współdziałania wszystkich naprężeń jest *średnie efektywne naprężenie*

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{F} \int \tau_x^2 dF}, \quad (a)$$

gdzie całkowanie obejmuje całą powierzchnię kuli, a wyciągnięcie kwadratowego pierwiastka kompensuje poprzednie wprowadzenie  $\tau_x^2$ . Szczegółowe przeliczenia<sup>(2)</sup> uzależniają



Rys. 8.5. Określenie efektywnego naprężenia stycznego  $\tau_e$

ją  $\tau_{ef}$  od wartości naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  w następujący sposób:

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (8.1)$$

gdy zaś stan naprężenia określa sześć składowych (rys. 7.10), wówczas

$$\tau_{ef} = \sqrt{\frac{1}{15} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)]}. \quad (8.2)$$

Można dowieść, że wartość  $\tau_{ef}$  jest niezmiennikiem stanu naprężenia, a więc nie zależy od tego, czy ten stan podany jest przez naprężenia główne, czy też w postaci ogólnej.

Przy poczynionych założeniach *naprężenie  $\tau_{ef}$  stanowi miarę niebezpieczeństwa, jakie przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń i to jest właśnie istotą hipotezy Hubera.*<sup>(3)</sup>

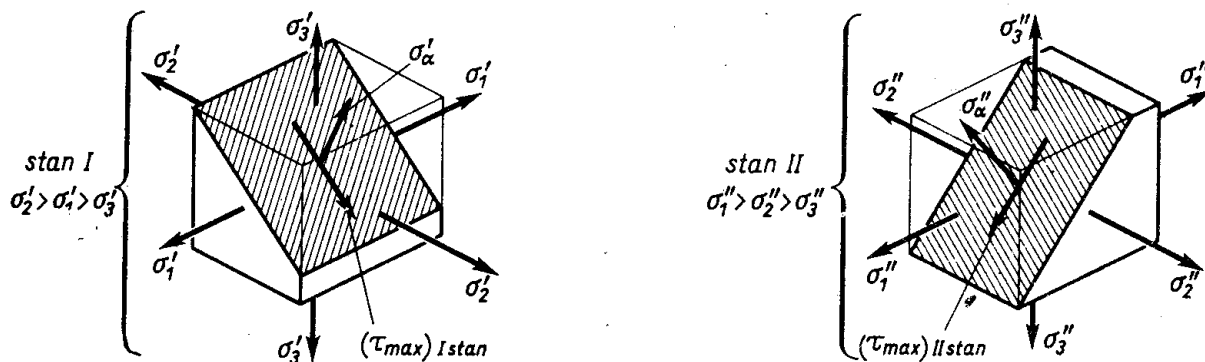
W przedstawionym ujęciu hipoteza Hubera ocenia niebezpieczeństwo poślizgu w elemencie  $ABCD$  przy uwzględnieniu przestrzennego współdziałania otoczenia, a przede

(1) Taki sposób stosuje się w fizyce i matematyce, na przykład skuteczna wartość prądu, minimum sumy kwadratów błędów itp.

(2) W. W. Nowożyłow, *Przykładowa matematyka i mechanika*, No 5, 1952 r.

(3) M. T. Huber (1872-1950), profesor Politechniki Lwowskiej i Warszawskiej, sformułował swą hipotezę (1904 r.) na przesłankach wyłącznie energetycznych. W wyniku otrzymał identyczne (z dokładnością do stałego współczynnika) wyrażenia (8.1) i (8.2). W jego interpretacji wyrażenia te przedstawiają energię odpowiadającą odkształceniu czysto postaciowemu (rys. 7.13) i to jest powodem drugiej równoległej nazwy tejże hipotezy.

wszystkim ziarnom znajdujących się w warstwie poślizgu. Zaniedbanie tego współdziałania oznaczałoby przyjęcie, że poślizg w ciałach polikrystalicznych odbywa się nie w warstwie o skończonej grubości, lecz w płaszczyźnie, czyli tak jak w monokryształach. Wtedy jednak parametrem decydującym o wystąpieniu poślizgu byłaby wyłącznie wartość naprężenia stycznego w tej płaszczyźnie, tj.  $\tau_{max}$ , gdyż takie jest właśnie położenie rzeczywistych warstw poślizgu. Takie uproszczone podejście jest istotą hipotezy  $\tau_{max}$ , głoszącej, że *wartość  $\tau_{max}$  stanowi miarę niebezpieczeństwa, jakie przedstawia dany stan naprężenia z uwagi na pojawienie się pierwszych makroskopowych trwałych odkształceń.*



Rys. 8.6. Porównanie wyężenia w dwóch różnych stanach naprężenia

Hipotezy wytrzymałościowe umożliwiają porównanie różnych stanów naprężenia z uwagi na niebezpieczeństwo pojawienia się trwałych odkształceń. Biorąc mianowicie dwa różne stany naprężenia I i II działające na ten sam materiał (rys. 8.6) powiemy, że według hipotezy Hubera dwa różne stany naprężenia są dla tego samego materiału jednako niebezpieczne, gdy

$$(\tau_{ef})_{I \text{ stan}} = (\tau_{ef})_{II \text{ stan}} \quad (8.3)$$

Jeśli jako podstawę przyjąć hipotezę  $\tau_{max}$ , to analogiczny wniosek jest, że według hipotezy  $\tau_{max}$  dwa różne stany naprężenia są dla tego samego materiału jednako niebezpieczne, gdy

$$(\tau_{max})_{I \text{ stan}} = (\tau_{max})_{II \text{ stan}} \quad (8.4)$$

Innymi słowy, jednakowy stopień bezpieczeństwa lub, jak mówimy inaczej, jednakowe wyężenie materiału jest wtedy, gdy wielkości przyjęte za miarę niebezpieczeństwa są sobie równe.

Przyjmijmy teraz, jako jeden ze stanów, stan prostego rozciągania, dla którego wartość naprężenia  $\sigma = R_e$  oznacza pojawienie się pierwszych wyraźnych odkształceń trwałych. Odpowiadające tej wartości  $\sigma$  naprężenie  $\tau_{ef} = R_e \sqrt{2}/15$  (obliczone z wzoru 8.1) bądź  $\tau_{max} = R_e/2$  stanowią dla innych stanów miernik pojawienia się trwałych odkształceń. W tym stwierdzeniu kryje się możliwość doświadczalnej weryfikacji hipotez. Biorąc mianowicie drugi złożony stan naprężenia obserwujemy przy jego wzroście moment pojawienia się pierwszych trwałych odkształceń i wyznaczamy odpowiadające temu momentowi wartości  $\tau'_{ef}$  i  $\tau'_{max}$ . Jasne jest, że ta hipoteza jest prawdziwa, której wynik, tj.  $\tau'_{ef}$  lub  $\tau'_{max}$ ,

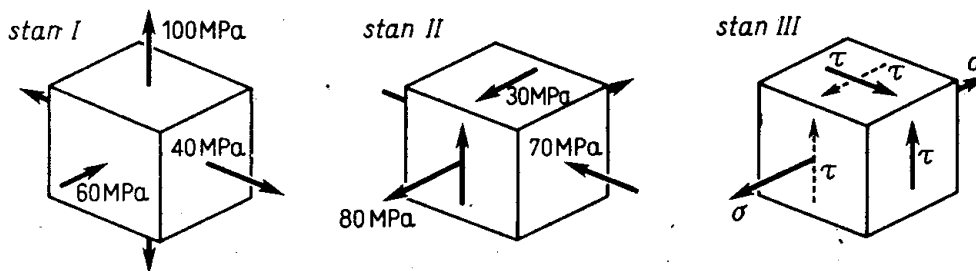
jest równy poprzednio określonej, tj.  $R_e \sqrt{2/15}$  lub  $R_e/2$ . Liczne doświadczenia przeprowadzone w ten sposób dowiodły, że dla ciał polikrystalicznych bliższa rzeczywistości jest hipoteza Hubera, różnice nie są jednak zbyt duże. Dla materiałów bezpostaciowych słuszność obydwóch hipotez jest dyskusyjna, gdyż brak jest wyraźnego momentu pojawienia się odkształceń trwałych oraz istnieje wyraźna zależność tych odkształceń od szybkości obciążenia. Drugim ograniczeniem stosowalności obydwóch hipotez jest zakres obejmujący tylko stany sprężyste, gdy  $\tau_{ef} \leq R_e \sqrt{2/15}$  lub  $\tau_{max} \leq R_e/2$ . Wynika to z założenia przyjętego w hipotezach, że materiał jest izotropowy (makroskopowo). Doświadczenia wykazują, że założenie to przestaje być słuszne przy większych trwałych odkształceniach.

Pomimo tych ograniczeń znaczenie hipotez jest ogromne, gdyż redukują one liczbę niezbędnych doświadczeń. W braku hipotez należałoby dla całej mnogości stanów naprężenia danego materiału prowadzić odrębne badania. Pomijając ogromny trud takich badań, należy zauważyć, że realizacja niektórych stanów jest wręcz niewykonalna. Te wszystkie kłopoty znikają dzięki ilościowemu ujęciu, które dają hipotezy.

### Zadania

1. Przyjmując hipotezę  $\tau_{max}$  określić, który ze stanów I czy II (rys. 8.7) jest groźniejszy i ile razy?

Odp.  $(\tau_{max})_I = 80 \text{ MPa}$ ;  $(\tau_{max})_{II} = 80 \text{ MPa}$ ; według więc hipotezy  $\tau_{max}$  obydwa stany są tak samo niebezpieczne.



Rys. 8.7.

2. Opierając się na hipotezie Hubera rozwiązać zadanie 1.

Odp.  $(\tau_{ef})_I = 51,1 \text{ MPa}$ ;  $(\tau_{ef})_{II} = 51,1 \text{ MPa}$ ; według więc hipotezy Hubera stany są jednakowo niebezpieczne. Ta zgodność wyników obydwóch hipotez nie jest jednak regułą.

3. Określić wartość  $\sigma$  w stanie rozciągania, aby był on tak samo niebezpieczny jak stan naprężenia I (rys. 8.7) dla tego samego materiału. Czy obie hipotezy dają tę samą odpowiedź?

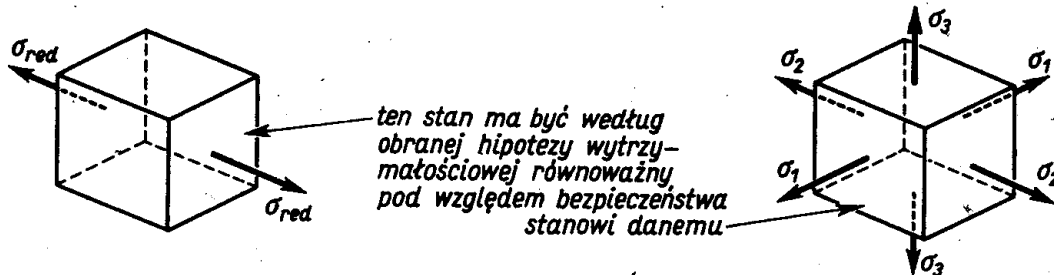
Odp. W stanie rozciągania  $\tau_{max} = \sigma/2$ ; porównując z  $(\tau_{max})_I = 80 \text{ MPa}$  mamy  $\sigma = 160 \text{ MPa}$  według hipotezy  $\tau_{max}$ ; według hipotezy Hubera  $(\tau_{ef})_{rozc} = \sigma \sqrt{2/15} \approx 0,365\sigma$  i z warunku  $(\tau_{ef})_{rozc} = (\tau_{ef})_I$  mamy  $\sigma = 140 \text{ MPa}$ . Tak więc odpowiedzi są różne.

4. Na kostkę III (rys. 8.7) działają naprężenia  $\sigma$  i  $\tau = \sigma/2$  (ciągłe strzałki). Czy wyteżenie materiału zmieni się, gdy naprężenia  $\tau$  zmienią płaszczyznę działania (strzałki kreskowane)? Czy obie hipotezy dają tę samą odpowiedź?

Odp. W pierwszym wariacie naprężenia główne są  $\sigma_1 = \sigma$ ,  $\sigma_2 = \tau = \sigma/2$ ,  $\sigma_3 = -\tau = -\sigma/2$ , skąd  $(\tau_{max})' = 0,75\sigma$ . W wariacie drugim  $\sigma_3 = 0$ ,  $\sigma_1 > 0$ ,  $\sigma_2 < 0$ , a  $(\tau_{max})'' = 0,5 \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 0,71\sigma$ . Tak więc według hipotezy  $\tau_{max}$  wariant I jest niebezpieczniejszy. Według hipotezy Hubera  $\tau_{ef}$  zostanie to samo i bezpieczeństwo nie zmieni się. Różnica opinii wynika z odmienności założeń hipotez, nie jest jednak duża.

### 8.3. Naprężenia zredukowane

W praktyce porównanie stanów naprężenia modyfikujemy w ten sposób, że jednym z nich jest *zawsze* stan prostego rozciągania (rys. 8.8). Jest to uzasadnione, gdyż próba rozciągania jest podstawowym i powszechnie stosowanym badaniem wytrzymałościowym.



Rys. 8.8. Obrazowe przedstawienie poszukiwania  $\sigma_{red}$

Gdy naprężenia przy prostym rozciąganiu są  $\sigma_{red}$ , z wzorów (7.4) i (8.1) mamy odpowiednio

$$(\tau_{max})_{rozc} = \sigma_{red}/2, \quad (\tau_{ef})_{rozc} = \sigma_{red} \sqrt{2/15}.$$

Stosując kryterium (8.4) mamy tzw. *naprężenie zredukowane*

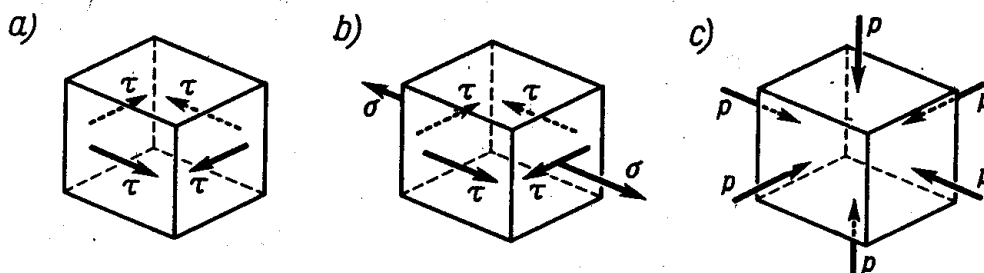
$$\sigma_{red} = 2(\tau_{max})_{dany} \text{ złozonego stanu naprężenia} \quad (8.5)$$

według hipotezy  $\tau_{max}$ . Stosując kryterium (8.3) i wzory (8.1) lub (8.2) otrzymujemy naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}, \quad (8.6a)$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (8.6b)$$

gdzie  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  bądź  $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$  — składowe danego złożonego stanu naprężenia przedstawionego przez naprężenia główne bądź w postaci ogólnej.



Rys. 8.9. Szczególne przypadki złożonych stanów naprężenia

Jako przykład stosowania tych wzorów rozpatrzmy stan czystego ścinania (rys. 8.9a), dla którego wiemy, że

$$\tau_{max} = \tau, \quad \sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = -\tau, \quad \sigma_3 = 0.$$

Po podstawieniu tych danych do (8.5) i (8.6) mamy

$$\text{według hipotezy } \tau_{max}: \quad \sigma_{red} \approx 2\tau, \quad (8.7a)$$

$$\text{według hipotezy Hubera:} \quad \sigma_{red} = \tau\sqrt{3}. \quad (8.7b)$$

Podobnie dla płaskiego stanu złożonego z rozciągania naprężeniami  $\sigma$  i ścinania naprężeniami  $\tau$  (rys. 8.9b) mamy

$$\tau_{\max} = \text{promień największego koła Mohra} = 0,5\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

a z wzorów (8.5) i (8.6)

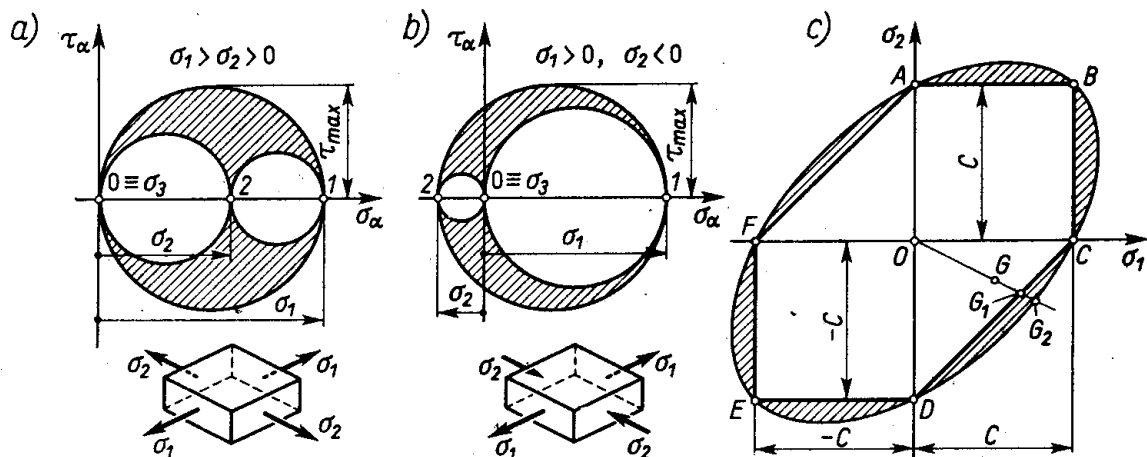
$$\text{według hipotezy } \tau_{\max}: \quad \sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, \quad (8.8a)$$

$$\text{według hipotezy Hubera:} \quad \sigma_{\text{red}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}. \quad (8.8b)$$

Wreszcie dla hydrostatycznego ściskania (rys. 8.9c):  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ,  $\tau_{\max} = 0$  i według obydwóch hipotez

$$\sigma_{\text{red}} = 0. \quad (8.9)$$

Przejrzysty obraz wyników obydwóch hipotez dla płaskiego stanu naprężenia daje rys. 8.10. Załóżmy, że  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są zmienne, zaś  $\sigma_{\text{red}} = \text{const} = C$ . Jeśli  $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ , to z rys. 8.10a mamy  $\tau_{\max} = \sigma_1/2$  i z wzoru (8.5):  $\sigma_1 = C$  niezależnie od wartości  $\sigma_2$ . W układzie współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_2$  daje to prostą  $BC$  (rys. 8.10c). Podobnie, gdy  $\sigma_2 > \sigma_1 > 0$ ,



Rys. 8.10. Porównanie wyników hipotez wytrzymałościowych

otrzymujemy prostą  $AB$ . Tak samo prześledzimy przypadek, gdy  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są ściskające, w wyniku czego mamy proste  $DE$  i  $EF$ . Na koniec, gdy  $\sigma_1\sigma_2 < 0$  (rys. 8.10b), wówczas z wzoru (8.5) mamy  $\sigma_{\text{red}} = |\sigma_1 - \sigma_2| = C$ , czyli równania prostych  $CD$  i  $AD$ . Otrzymany sześciokąt obrazuje według hipotezy  $\tau_{\max}$  dozwoloną zmienność  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  przy warunku  $\sigma_{\text{red}} = C$ . Jeśli to samo zrobimy posługując się hipotezą Hubera, to z wzoru (8.6a) mamy zależność

$$\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = C^2, \quad (a)$$

przedstawiającą elipsę opisaną na poprzednim sześciokącie. Zakreskowany obszar ilustruje różnice wyników obydwóch hipotez. Widać, że różnice nie są zbyt duże (max 15%) i to jest powodem równoległego stosowania w praktyce obydwóch hipotez. Widać również, że hipoteza  $\tau_{\max}$  jest w swoich przewidywaniach ostrożniejsza od hipotezy Hubera, daje bowiem mniejsze wartości  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  odpowiadające tej samej wartości  $\sigma_{\text{red}}$ .



Jeśli w omawianym przykładzie przyjąć  $\sigma_{red} = R_e$ , to odpowiedni sześciokąt lub elipsa obrazują tzw. *warunek plastyczności* płaskiego stanu naprężenia. Punkty wewnątrz obszaru ograniczonego jednym z tych konturów, jak punkt *G*, reprezentują sprężyste stany ( $\sigma_{red} < R_e$ ), punkty na zewnątrz — stany uplastycznione.

Techniczny sens ogólnych zależności (8.5) i (8.6) oraz wyników (8.7)÷(8.9) polega, mówiąc obrazowo, na przetłumaczeniu niebezpieczeństwa pewnego złożonego stanu naprężenia na zrozumiały dla wszystkich stan prostego rozciągania. I tak jeśli na kostkę (rys. 8.9a) działa  $\tau = 100$  MPa, to zależność (8.7a) informuje, że taki stan czystego ścinania jest według hipotezy  $\tau_{max}$  tak niebezpieczny dla danego materiału, jak proste rozciąganie naprężeniami  $\sigma_{red} = 200$  MPa. Aby ocenić, czy wartość tę można dopuścić, należy porównać ją z granicą plastyczności  $R_e$  określoną z próby rozciągania tego materiału. Jeśli  $\sigma_{red} > R_e$ , to dany złożony stan naprężenia jest groźniejszy dla materiału niż proste rozciąganie naprężeniami  $\sigma = R_e$ , a więc spowoduje on trwałe odkształcenia. Dla budowy maszyn jest to nie do przyjęcia i przypadek taki wskazuje konieczność modyfikacji konstrukcji. Nierówność  $\sigma_{red} < R_e$  jest więc warunkiem koniecznym prawidłowej pracy danego elementu maszyny. Jest on jednak niewystarczający, gdyż, jak wiemy z art. 1.9, nie możemy przy rozciąganiu przekroczyć naprężenia dopuszczalnego  $k_r$ . Jeśli więc w danym złożonym stanie naprężenia ma być ten sam współczynnik bezpieczeństwa  $n_e$  co i w prostym rozciąganiu, to

$$\sigma_{red} \leq k_r = \frac{R_e}{n_e} \quad (8.10)$$

Zastosowanie wzoru (8.10) jest dwojaki: Pierwsze z nich, to bezpośrednia kontrola wartości  $\sigma_{red}$  w stosunku do  $k_r$  lub ocena współczynnika bezpieczeństwa  $n_e = R_e/\sigma_{red}$  danego złożonego stanu naprężenia. Drugi wariant, gdy mając dane  $R_e$  i  $n_e$  szukamy naprężeń dopuszczalnych dla stanów naprężenia określonego typu. Dla stanu na przykład czystego ścinania, w którym zależnie od obranej hipotezy  $\sigma_{red} = 2\tau$  bądź  $\sigma_{red} = \tau\sqrt{3}$ , otrzymujemy z wzoru (8.10) nieprzekraczalną wartość  $\tau = k_t$ , jako

$$k_t = k_r/2 \quad \text{lub} \quad k_t = k_r/\sqrt{3} \approx 0,58 k_r. \quad (b)$$

Druga z tych wartości jest identyczna z informacją (wzór 3.8), którą stosowano przy ocenie bezpieczeństwa skręcanego pręta.

### Zadania

1. Jaki jest techniczny sens wzoru (8.9)?

Odp.  $\sigma_{red} = 0$  oznacza, że jakie by nie były wartości  $p$ , to stan z rys. 8.9c nie jest w ogóle groźny dla materiału. Przykładowo: kostka z ołowiu ( $R_e = 20$  MPa) poddana  $p = 300$  MPa nie ma trwałych odkształceń<sup>(1)</sup>, pomimo że  $p \gg R_e$ .

<sup>(1)</sup> Jest to potwierdzone doświadczalnie i jest jednym z dowodów przemawiających za hipotezą  $\tau_{max}$  bądź hipotezą Hubera.

2. Jaki sens mają wyznaczone w zadaniu 3 art. 8.2 wartości  $\sigma$ ? Określić współczynnik  $n_e$  kostki II (rys. 8.7), jeśli  $R_e = 240$  MPa.

Odp. Są to wartości  $\sigma_{red}$ ; według hipotezy  $\tau_{max}$  jest  $n_e = 1,5$ ; według hipotezy Hubera jest  $n_e \approx 1,7$ . Jak widać, ocena  $n_e$  według hipotezy  $\tau_{max}$  jest ostrożniejsza.

3. W kostce (rys. 7.5a):  $\sigma_x = 80$  MPa,  $\sigma_y = -60$  MPa,  $\tau = 50$  MPa. Czy ten stan jest dopuszczalny, jeśli  $k_r = 150$  MPa?

Odp. Według hipotezy  $\tau_{max}$  stan jest niedopuszczalny, bo  $\sigma_{red} = 172$  MPa  $>$   $k_r$ . Według hipotezy Hubera stan jest jeszcze dopuszczalny, bo  $\sigma_{red} = 149$  MPa  $<$   $k_r$ .

4. W kostce (rys. 8.10a)  $\sigma_1 = 2\sigma_2$ . Jaka wartość  $\sigma_1$  można dopuścić dla materiału, w którym  $k_r = 180$  MPa?

Odp. Według hipotezy  $\tau_{max}$  jest  $k_1 = k_r = 180$  MPa; według hipotezy Hubera z wzoru (8.6a)  $\sigma_{red} = \sigma_1 \sqrt{3/2} = k_r$ , skąd  $\sigma_1 = 208$  MPa. Tak więc znowu hipoteza  $\tau_{max}$  jest ostrożniejsza.

5. W kostce (rys. 8.9b)  $\sigma = 100$  MPa. Jaka wartość  $\tau$  można dopuścić dla materiału, w którym  $R_e = 240$  MPa, a  $n_e = 2$ ?

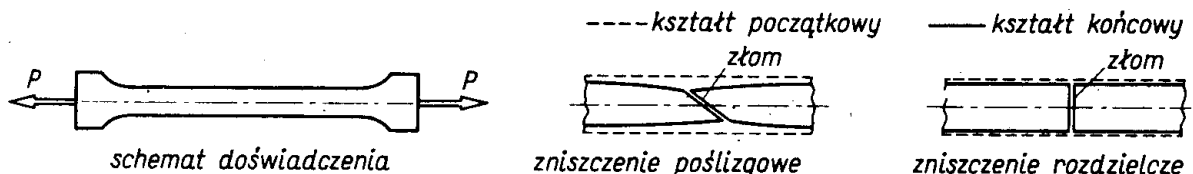
Odp. Z wzorów (8.8) według hipotezy  $\tau_{max}$  mamy  $\tau = 49$  MPa, a według hipotezy Hubera  $\tau = 56$  MPa.

6. Wykorzystując rys. 8.10c określić współczynnik bezpieczeństwa dwuwymiarowego stanu naprężenia, gdy  $\sigma_1 = C/2$ ,  $\sigma_2 = -C/4$  w stosunku do nieprzekraczalnej wartości  $\sigma_{red} = C$ .

Odp. Nanosząc  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  otrzymujemy na rys. 8.10c punkt G. Proporcjonalnemu zwiększeniu  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  odpowiada wędrowka punktu po promieniu OG. Przecięcie promienia w punktach  $G_1$  i  $G_2$  określa stan graniczny, gdy  $\sigma_{red} = C$ . Stosunek promieni  $\overline{OG_1}/\overline{OG} \approx 1,3$  lub  $\overline{OG_2}/\overline{OG} \approx 1,5$  daje szukaną wartość współczynnika według obranej hipotezy.

## 8.4. Zniszczenie materiału. Hipoteza Mohra

Zjawisko zniszczenia materiału pod działaniem naprężeń jest znacznie bardziej złożone niż zjawiska pojawienia się pierwszych trwałych odkształceń. Doświadczenia dowodzą, że zniszczenie może być wynikiem ścicia wzdłuż płaszczyzny poślizgu lub rozszczepienia materiału (rys. 8.11). W pierwszym przypadku to *zniszczenie poślizgowe* spowodowane

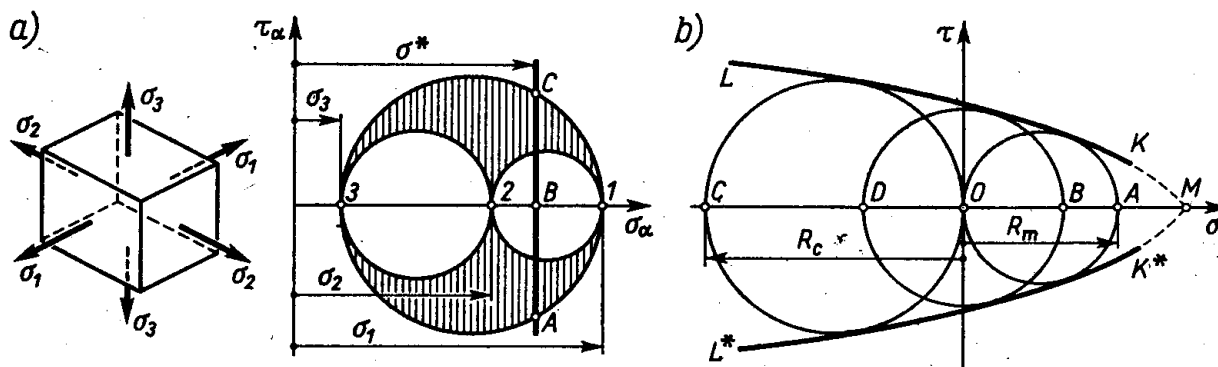


Rys. 8.11. Obrazy zniszczenia poślizgowego i rozdzielczego

jest naprężeniami stycznymi, a sam proces zniszczenia stanowi kontynuację pierwszych poślizgów. W drugim przypadku tzw. *zniszczenie rozdzielcze* wywołane jest naprężeniami normalnymi do płaszczyzny podziału i związane jest z przewyciężeniem sił kohezji między cząsteczkami materiału. Obydwa te procesy są więc różne w swej istocie.

Stan wiedzy w tej dziedzinie, pomimo intensywnych badań, nie pozwala jeszcze na sformułowanie teorii lub hipotezy, które nie byłyby dyskusyjne. Z drugiej strony, ze względów praktycznych, nawet niedoskonała ocena niebezpieczeństwa zniszczenia jest lepsza niż żadna. Jedną z takich ocen daje tzw. *hipoteza Mohra*.

Punktem wyjścia tej hipotezy jest założenie, że o zniszczeniu materiału decyduje wartość naprężeń w jednym szczególnym przekroju. Jest to punkt najbardziej dyskusyjny, gdyż niektóre doświadczenia, zwłaszcza przy trójwymiarowym ściskaniu, temu przeczą. Przyjmując jednak to za prawdę, zbadajmy trójwymiarowy stan naprężenia i odpowiadający



Rys. 8.12. Wykreślne przedstawienie hipotezy Mohra

mu układ kół Mohra (rys. 8.12a). Punkty leżące na prostej  $ABC$  odpowiadają grupie przekrojów o tym samym normalnym naprężeniu  $\sigma^*$ , lecz różnym naprężeniu stycznym. Jest rzeczą naturalną przypuścić, że najbardziej zagrożone z tej grupy są przekroje odpowiadające punktom  $A$  i  $C$ , w których naprężenie styczne jest maksymalne. Powtarzając to rozumowanie dla innych wartości  $\sigma^*$ , dochodzimy do wniosku, że ze wszystkich możliwych przekrojów najbardziej zagrożony jest jeden z reprezentowanych przez punkty zewnętrznego koła Mohra. Innymi słowy, tylko zewnętrzne koło Mohra określa, czy zniszczenie nastąpi, czy nie.

Przypuśćmy, że mając nieograniczone możliwości laboratoryjne zbadaliśmy zniszczenie danego materiału w różnych stanach naprężenia. *Maksymalne* koła Mohra dla każdego z tych stanów, tworzą razem obraz (rys. 8.12b), w którym koło  $OA$  odpowiada zniszczeniu przy prostym rozciąganiu ( $OA = R_m$ ), koło  $OC$  zniszczeniu przy prostym ściskaniu ( $OC = R_c$ ), koło  $DB$  zniszczeniu przy czystym ścinaniu itd. Obwiednie  $KL$  i  $K^*L^*$  tych wszystkich kół opisują według hipotezy Mohra warunek zniszczenia. Wystąpi ono wtedy, gdy maksymalne koło Mohra dla danego stanu naprężenia będzie styczne do tych obwiedni. Hipotetyczny punkt  $M$  odpowiada zniszczeniu w stanie trójwymiarowego rozciągania<sup>(1)</sup>, gdy  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$ , lewa natomiast strona wykresu opisuje przypadki, gdy wszystkie naprężenia główne są ściskające.

Ograniczone w rzeczywistości środki laboratoryjne zmuszają do wprowadzenia uproszczeń w tym obrazie. Z reguły znane są z doświadczeń tylko wartości  $R_m$  i  $R_c$ . Z tych dwóch informacji nie można określić rzeczywistego przebiegu obwiedni  $KL$  i  $K^*L^*$ . Jedyne technicznie rozsądne wyjście to zastąpienie ich prostymi  $HF$  i  $H^*F^*$  stycznymi do kół  $OA$  i  $OC$  (rys. 8.13) wykraczającymi tylko nieznacznie poza punkty styczności. Z tego obrazu można łatwo wyznaczyć związek między parametrami  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  granicznego koła  $BD$  odpowiadającego danemu stanowi  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Związek ten jest

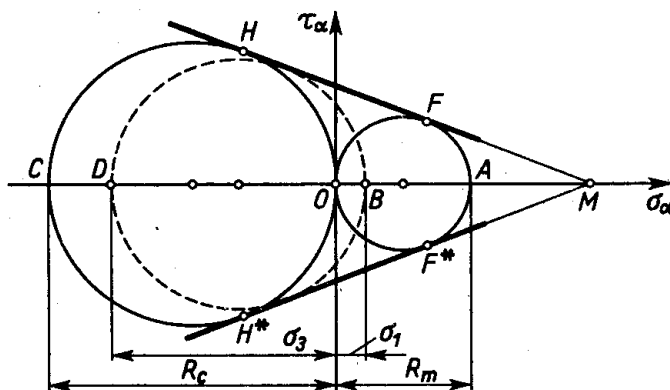
$$(\sigma_1/R_m) - (\sigma_3/R_c) = 1. \quad (8.11)$$

<sup>(1)</sup> Stanu tego nie udało się dotąd zrealizować w sposób ścisły.

Dla czystego ścinania naprężenia główne są  $\sigma_1 = \tau$ ,  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_3 = -\tau$  i z wzoru (8.11) otrzymujemy graniczną wartość  $R_t$  naprężenia  $\tau$  jako

$$\tau_{gran} = R_t = R_m R_c / (R_m + R_c). \quad (a)$$

Dla metali plastycznych  $R_c = R_m$  i wtedy  $R_t = 0,5 R_m$ . Wynik ten jest o  $\sim 15\%$  mniejszy od wartości doświadczalnych. Lepszą zgodność ( $\sim 10\%$ ) otrzymuje się dla materiałów kruchych (żeliwo, beton, szkło) i to jest powodem, że hipotezę Mohra dla tych materiałów można stosować w zakresie odpowiadającym przybliżonemu przebiegowi obwiedni  $HF$  i  $H^*F^*$  (rys. 8.13). Dla metali plastycznych hipotezę Mohra stosujemy rzadko, gdyż warunek  $\sigma_{red} \leq R_e$ , tj. pojawienia się trwałych odkształceń, jest już dostatecznym miernikiem bezpieczeństwa.



Rys. 8.13. Uproszczona analiza zniszczenia

Jeśli dany stan naprężenia  $\sigma_1^* > \sigma_2^* > \sigma_3^*$  nie jest graniczny, to z (8.11) mamy współczynnik bezpieczeństwa  $n_m$  jako

$$n_m = \frac{1}{(\sigma_1^*/R_m) - (\sigma_3^*/R_c)}. \quad (8.12)$$

Wartość ta wyraża, ile razy należy powiększyć  $\sigma_1^*$  oraz  $\sigma_3^*$ , aby dojść do zniszczenia materiału.

### Zadania

1. Dla żeliwa szarego  $R_m = 200$  MPa,  $R_c = 700$  MPa. Przy jakiej wartości  $\sigma_1$  nastąpi zniszczenie, jeśli  $\sigma_1 = 2\sigma_2 = -2\sigma_3$ ?

Odp. Z wzoru (8.11) przy  $\sigma_3 = -\sigma_1/2$  mamy  $\sigma_1 = 2\sigma_2 = -2\sigma_3 = 175$  MPa.

2. Określić naprężenia dopuszczalne dla żeliwa ( $R_m = 200$  MPa,  $R_c = 700$  MPa), jeśli  $\sigma_1 = \sigma_2 = -0,5\sigma_3$ , a wymagany  $n_m = 4$ .

Odp. Z wzoru (8.11) graniczne wartości są  $\sigma_1 = \sigma_2 = 127$  MPa,  $\sigma_3 = -254$  MPa i dzieląc je przez  $n_m$  mamy  $\sigma_1^* = \sigma_2^* = 32$  MPa,  $\sigma_3^* = -64$  MPa.

3. Na kostkę (rys. 8.9b) szklaną ( $R_m = 60$  MPa,  $R_c = 600$  MPa) działają  $\sigma = -100$  MPa,  $\tau = 40$  MPa. Czy w tym stanie kostka ulegnie zniszczeniu, a jeśli nie, to jaki jest współczynnik  $n_m$ ?